Tabela de coeficientes de Clebsch-Gordan – problemas

(1) Uma part. de spin 1 e uma de spin 2 estão em repouso, em um estado tal que o spin total é 3 e sua componente S_z é $\hbar$. Se medirmos a componente z da part. de spin 2, que valores podemos ter, e com qual probabilidade?

(2) Escreva a matriz unitária de coeficientes de Clebsch-Gordan que leva a base $\{|m_1, m_2\rangle\}$ na base $\{|j, m\rangle\}$, para o caso de um spin 1 e um spin $\frac{1}{2}$.

Atividade - coeficientes de Clebsch-Gordan

Problema 1: Do enunciado $\begin{cases} j=3 & m=1 \\ j_1=2 & j_2=1 \end{cases}$

Olho a tabela $j_1=2, j_2=1$, procurando a expansão na base $|m_1 m_2\rangle$ do estado $|j=3, m=1\rangle$ — veja coluna

m_1	m_2	3 +1
2	−1	1/15
1	0	8/15
0	+1	6/15

$$\Rightarrow \underset{j\ m}{|3\,1\rangle} = \sqrt{\tfrac{1}{15}}\,\underset{m_1\,m_2}{|2,-1\rangle} + \sqrt{\tfrac{8}{15}}\,\underset{m_1\,m_2}{|1,0\rangle} + \sqrt{\tfrac{6}{15}}\,\underset{m_1\,m_2}{|0\,+1\rangle}$$

$\Rightarrow$ tenho $m_2 = -1$ com prob $\frac{1}{15}$ $\Rightarrow$ medida de J_z dá $-\hbar$

$m_2 = 0$ $\qquad \frac{8}{15} \Rightarrow 0$

$m_2 = 1$ $\qquad \frac{6}{5} \Rightarrow \hbar$

Problema 2: É um quadro de tabelas na matriz 6×6 os coeficientes da tabela $1\times\frac{1}{2}$. Note que vários são $=0$, por isso a tabela não é 6×6, e sim uma "tirinha" na diagonal.

Cuidado com a escolha dos índices das linhas e colunas da matriz. Uma escolha possível é: (m_1, m_2)

j m	$1\ \frac{1}{2}$	$1\ -\frac{1}{2}$	$0\ \frac{1}{2}$	$0\ -\frac{1}{2}$	$-1\ \frac{1}{2}$	$-1\ -\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}$						
$\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$						
$\frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}$						
$\frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}$						
$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$						
$\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$						

Operadores escalares e vetoriais [Cohen-Tannoudji B_{VI}]

- Operadores se transformam sob rotações:

$$A \rightarrow D(R)\, A\, D^{\dagger}(R)$$

- No caso de rotação infinitesimal:

$$A \rightarrow \left(1 - i\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}\delta\phi\right) A \left(1 + i\frac{\vec{J}\cdot\vec{n}}{\hbar}\delta\phi\right) = A - \frac{i}{\hbar}\delta\phi\left[\vec{J}\cdot\hat{n}, A\right]$$

- Operadores escalares são aqueles que não mudam com rotação

$A \rightarrow A$. Isso acontece se $\underline{[\vec{J}\cdot\hat{n}, A] = 0}$

$\Rightarrow$ op. escalares comutam com os 3 componentes do momento angular.

Ex: J^2, $\vec{R}\cdot\vec{P}$, H.

Operadores vetoriais

- Um vetor em física clássica é uma quantidade com 3 componentes que se transforma sob rotações assim: $V_i \rightarrow \sum_j R_{ij} V_j$ ← MATRIZ de rotação 3×3

- Em mecânica quântica, operadores vetoriais $\vec{V}$ devem ter seus valores esperados transformados da mesma forma que vetores em física clássica.

- Como $|\alpha\rangle \rightarrow D(R)|\alpha\rangle \Rightarrow \langle\alpha|V_i|\alpha\rangle \rightarrow \langle\alpha|D^{\dagger}(R)V_i D(R)|\alpha\rangle$

$$= \sum_j R_{ij}\langle\alpha|V_j|\alpha\rangle$$

Como isso vale para qualquer $|\alpha\rangle$, operadores vetoriais são aqueles que satisfazem

$$D^{\dagger}(R)\, V_i\, D(R) = \sum_j R_{ij} V_j$$

• Vamos considerar rotações infinitesimais: $D(R) = 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}\vec{J}\cdot\hat{n}$

$$\Rightarrow D^\dagger(R) V_i D(R) = \underbrace{\left(1 + \frac{i\varepsilon\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}\right) V_i \left(1 - \frac{i\varepsilon\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}\right)}_{V_i + \frac{\varepsilon}{i\hbar}[V_i, \vec{J}\cdot\hat{n}]} = \sum_j R_{ij}(\hat{n},\varepsilon) V_j$$

No caso de $\hat{n} = \hat{z}$:

$$R(\hat{z},\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} x: & V_x + \frac{\varepsilon}{i\hbar}[V_x, J_z] = V_x - \varepsilon V_y \\ y: & V_y + \frac{\varepsilon}{i\hbar}[V_y, J_z] = \varepsilon V_x + V_y \\ z: & V_z + \frac{\varepsilon}{i\hbar}[V_z, J_z] = V_z \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [V_x, J_z] = -i\hbar V_y \\ [V_y, J_z] = i\hbar V_x \\ [V_z, J_z] = 0 \end{cases}$$

Considerando rotações infinitesimais em torno de $\hat{x}$ e $\hat{y}$ encontramos:

$$\boxed{[V_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} V_k} \quad \text{(I)}$$

• Podemos usar a propriedade (I) acima como a definição de operador vetorial.

• As relações de comutação de grandezas vetoriais ((I)) foram obtidas usando rotações infinitesimais, mas servem p/ determinar o comportamento de $\vec{V}$ sob rotações finitas:

$$\exp\left(\frac{iJ_j\phi}{\hbar}\right) V_i \exp\left(-\frac{iJ_j\phi}{\hbar}\right)$$

← Usando BHC isso se reduz a calcular $[J_j,[J_j, \cdots [J_j,V_i]\cdots]]$ onde cada comutador é proporcional a V_i ou V_k ($k \neq i,j$).

• Todos os operadores vetoriais que conhecemos devem satisfazer (I):

• $\vec{J}$: óbvio (relação de comutação fundamental do momento angular)

• $[y, L_z] = i\hbar x$

$[x, L_z] = -i\hbar y$

• $[p_x, L_z] = -i\hbar p_y$

$[p_y, L_z] = i\hbar p_x$

etc, como pode ser facilmente verificado.

—— || ——

Elementos de matriz de op. escalares e vetoriais

Escalares

• Vimos que escalares comutam com J_x, J_y e J_z, e portanto também com J_+, J_-, J^2.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \text{se } A \text{ é escalar} \\ A = a\mathbb{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \langle jm|A|j'm'\rangle = \langle jm|a\mathbb{1}|j'm'\rangle = a\,\delta_{jj'}\,\delta_{mm'}$$

ou seja, a maior parte dos elementos de matriz de A são 0

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & & 0 \\ & a & \\ 0 & & a \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{bloco } (2j+1)\times(2j+1)$$

• Isso é consequência do comportamento de A sob rotações. Vejamos agora o que podemos dizer dos elementos de matriz de operadores vetoriais.

Operadores vetoriais [Cohen-Tannoudji D_X]

• Temos $J_\pm = J_x \pm i J_y$. ~~Agora~~ Para um op. vetorial $\vec{V}$, definimos

$$V_\pm = V_x \pm i V_y$$

• Como $\vec{V}$ é vetorial, sei que: $[V_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} V_k$

$$\Rightarrow \begin{cases} [J_x, V_\pm] = \underbrace{[J_x, V_x]}_{0} \pm i \underbrace{[J_x, V_y]}_{-i\hbar V_z} = \mp \hbar V_z \quad \text{e similarmente} \quad (\mathrm{I}) \\ [J_y, V_\pm] = -i\hbar V_z \quad (\mathrm{II}) \\ [J_z, V_\pm] = \pm \hbar V_\pm \quad (\mathrm{III}) \end{cases}$$

• Com essas relações de comutação, podemos calcular aquelas entre $J_\pm$ e $V_\pm$:

$$\begin{cases} [J_+, V_+] = \underbrace{[J_x, V_+]}_{-\hbar V_z} + i \underbrace{[J_y, V_+]}_{+ i \cdot (-i\hbar V_z)} = 0 \quad (\mathrm{IV}) \\ [J_+, V_-] = 2\hbar V_z \quad (\mathrm{V}) \\ [J_-, V_+] = -2\hbar V_z \quad (\mathrm{VI}) \\ [J_-, V_-] = 0 \quad (\mathrm{VII}) \end{cases}$$

• Vamos precisar deste teorema:

Se 2 observáveis comutam, e se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são 2 autovetores de A com autovalores diferentes, então o elemento de matriz $\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0$.

Prova: $A|\psi_1\rangle = a_1|\psi_1\rangle$ $\quad A(B|\psi_2\rangle) = B\underbrace{A|\psi_2\rangle}_{a_2|\psi_2\rangle} = a_2(B|\psi_2\rangle)$

$A|\psi_2\rangle = a_2|\psi_2\rangle$

$\Rightarrow B|\psi_2\rangle$ é ~~autovetor~~ de A com autovalor a_2.

$\Rightarrow B|\psi_2\rangle$ é $\perp$ a $|\psi_1\rangle$.

$\Rightarrow \langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0$

• Agora vamos provar que as relações de comutação que encontramos significam que vários elementos de matriz de $\vec{V}$ são nulos.

• $[V_z, J_z] = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\langle j\, m|V_z|j'\, m'\rangle = 0 \text{ se } m \neq m'.}$ (pelo teorema acima).

• Elementos de matriz de $V_\pm$:

Relação III, p. 32: $[J_z, V_\pm] = \pm\hbar V_\pm \Rightarrow J_z V_\pm = V_\pm J_z \pm \hbar V_\pm \quad [\cdot|j', m'\rangle]$

$\Rightarrow J_z(V_\pm|j'm'\rangle) = V_\pm J_z|j'm'\rangle \pm \hbar V_\pm|j'm'\rangle$

$= (m' \pm 1)\hbar(V_\pm|j'm'\rangle)$

$\Rightarrow V_\pm|j'm'\rangle$ é autovetor de J_z com autovalor $(m'\pm 1)\hbar$

$\Rightarrow$ $\boxed{\langle j\, m|V_\pm|j'm'\rangle = 0 \text{ se } m \neq m' \pm 1}$

° Resumindo: para elementos de matriz diferentes de zero precisamos:

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{V_z}: & \Delta m = m - m' = 0 \\ \underline{V_+}: & \Delta m = m - m' = +1 \\ \underline{V_-}: & \Delta m = m - m' = -1 \end{array}\right\}$$

<u>REGRAS de SELEÇÃO</u>

Para V_z, $V_\pm$.

$\Rightarrow$ em cada subespaço com j fixo ($\dim \mathcal{H} = 2j+1$) temos que V_z é op. diagonal, e $V_\pm$ só tem elementos de matriz $\neq 0$ logo acima e abaixo da diagonal.